第 2 講　和の記号Σ，階差数列

PART1　和の記号Σ

例題

(1)　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i)　$\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$　　(ii)　$\sum_{k=1}^{6}2^k$

(2)　次の式を，和の記号Σを用いて表せ。

(i)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$　　(ii)　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n$

(3)　和 $\sum_{k=1}^{n}2^k$ を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i)　$\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$　　(ii)　$\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

(2)　次の式を，和の記号Σを用いて表せ。

(i)　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$　　(ii)　$1\cdot1+3\cdot2+5\cdot4+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^n$

(3)　和 $\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k$ を求めよ。

第 2 講　PART1 確認問題

1　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

$$\sum_{k=1}^{4}(3k-2)=1+4+\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イウ}}$$

2　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

$$\sum_{k=1}^{5}5^{k-1}=1+\boxed{\text{エ}}+25+\boxed{\text{オカキ}}+625$$

3　$3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+10^2=\boxed{\text{ク}}$

$\boxed{\text{ク}}$ は，次の①～④のうちから選べ。

①　$\sum_{k=1}^{10}k$　　②　$\sum_{k=1}^{10}k^2$

③　$\sum_{k=3}^{10}k^2$　　④　$\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2$

4　$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot3^n$

$=\boxed{\text{ケ}}$

$\boxed{\text{ケ}}$ は，次の①～④のうちから選べ。

①　$\sum_{k=1}^{n}k\cdot3^{k-1}$　　②　$\sum_{k=1}^{n}k\cdot3^{k}$

③　$\sum_{k=1}^{n+1}k\cdot3^{k-1}$　　④　$\sum_{k=1}^{n+1}k\cdot3^{k}$

5　$\sum_{k=1}^{n}2\cdot6^k=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\left(\boxed{\text{ス}}^{\,n}-1\right)$

第 2 講　和の記号Σ，階差数列

PART1　和の記号Σ

例題

(1) 次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$　　(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}2^k$

(2) 次の式を，和の記号Σを用いて表せ。

(i) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$　　(ii) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n$

(3) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k$ を求めよ。

(1) (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k-1)=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+(2\cdot4-1)+(2\cdot5-1)=1+3+5+7+9$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}2^k=2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=2+4+8+16+32+64$

(2) (i) $\displaystyle 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$

(ii) $\displaystyle 1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n=\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2(2^n-1)$

練習

(1)　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i)　$\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$　　(ii)　$\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

(2)　次の式を，和の記号Σを用いて表せ。

(i)　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$　　(ii)　$1\cdot1+3\cdot2+5\cdot4+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^n$

(3)　和 $\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k$ を求めよ。

(1) (i)　$\sum_{k=1}^{4}(3k+1)=(3\cdot1+1)+(3\cdot2+1)+(3\cdot3+1)+(3\cdot4+1)=4+7+10+13$

(ii)　$\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}=3^0+3^1+3^2+3^3+3^4=1+3+9+27+81$

(2) (i)　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$

(ii)　$1\cdot1+3\cdot2+5\cdot4+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^n=\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)\cdot2^{k-1}$

(3)　$\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k=\dfrac{6(3^n-1)}{3-1}=3(3^n-1)$

第２講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イウ：10

[解説]

第４項までを列挙すると

$$\sum_{k=1}^{4}(3k-2)=(3\cdot1-2)+(3\cdot2-2)+(3\cdot3-2)+(3\cdot4-2) \quad \text{[A]}$$

$$=1+4+\mathbf{7}+\mathbf{10}$$

[A]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$

2

[正解] エ：5，オカキ：125

[解説]

第５項までを列挙すると

$$\sum_{k=1}^{5}5^{k-1}=5^0+5^1+5^2+5^3+5^4 \quad \text{[B]}$$

$$=1+\mathbf{5}+25+\mathbf{125}+625$$

[B]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$

3

[正解] ク：③

[解説]

$$3^2+4^2+5^2+\cdots+10^2 \quad \text{[C]}$$

$$=\sum_{k=3}^{10}k^2$$

[C]　数列 1^2，2^2，3^2，… の第 k 項が k^2 である。
この数列の第３項から第10項までの和である。

4

[正解] ケ：③

[解説]

数列 $1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot3^2$，……の第 k 項は $k\cdot3^{k-1}$ であるから

$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot3^n \quad \text{[D]}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}k\cdot3^{k-1}$$

[D]　数列 $1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot3^2$，……の初項から第 $(n+1)$ 項までの和である。

5 **[正解]** コサ：12，シ：5，ス：6

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 6^k = 2\cdot 6 + 2\cdot 6^2 + 2\cdot 6^3 + \cdots\cdots + 2\cdot 6^n$$ [E]

$$= \frac{12(6^n - 1)}{6-1}$$

$$= \mathbf{\frac{12}{5}(6^n - 1)}$$

［E］　初項 12，公比 6，項数 n の等比数列の和である。